**BTS OPTICIEN LUNETIER**

MATHÉMATIQUES

SESSION 2023

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.

## EXERCICE 1

### Partie A – Étude d'une série statistique

1) Un ajustement affine de $N$ en $t$ n'est pas approprié car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.

2) a) $r \approx -0{,}989$

b) L'ajustement affine de $z$ en $t$ est justifié car le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t, z)$ est proche de -1.

3) $z = -0{,}80\,t + 4{,}83$

4) $z = \ln(415 - N) = -0{,}80t + 4{,}83$

$415 - N = e^{-0{,}80t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{-0{,}80t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{4{,}83} \times e^{-0{,}80t}$

$N$ est de la forme $N = 415 - Ce^{-0{,}8t}$ avec $C = e^{4{,}83} \approx 125$

On a finalement : $N = 415 - 125e^{-0{,}8t}$

5) En 2023, $t = 6$ donc $N = 415 - 125\,e^{-0{,}80 \times 6} \approx 414$

Le nombre de montures vendues sera de 414 en 2023.

**Partie B – Résolution d'une équation différentielle**

1) Les solutions de l'équation différentielle ($E_0$) sont les fonctions $f$ définies sur l'intervalle [0 ; +∞[ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t} = k\,e^{-0,8t}$ où $k \in \mathbb{R}$

2) * La fonction $g$ est dérivable sur [0 ; +∞[ et $g'(t) = 0$

   * *La fonction* $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ donc
   $5g'(t) + 4g(t) = 1660$, pout tout $t$ de [0 ; +∞[
   $0 + 4c = 1660$
   Donc $c = \dfrac{1660}{4} = 415$

3) Les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont les fonctions $f$ définies sur l'intervalle [0 ; +∞[ par $f(t) = k\,e^{-0,8t} + g(t) = k\,e^{-0,8t} + 415$ où $k \in \mathbb{R}$

4) $f(0) = 290$

   $k\,e^{0} + 415 = 290$

   $k = 290 - 415 = -125$

   Conclusion : La fonction $f$ recherchée est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[ par :
   $f(t) = -125\,e^{-0,8t} + 415.$

**Partie C – Étude d'une fonction**

1) <u>La ligne 3</u> du logiciel de calcul formel fournit la limite de f en +∞, on en déduit que :
- La courbe $Cf$ admet, en + ∞, une asymptote d'équation $y = 415$.
- À long terme, le nombre de montures vendues de ce modèle sera égal à 415 par an.

2) <u>La ligne 1</u> du logiciel donne une expression de la dérivée de la fonction $f$ :

$$f'(t) = 100\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t}$$

   $\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t} > 0$, pour tout $t$ de [0 ; +∞[ donc $f'(t) > 0$, pour tout $t$ de [0 ; +∞[

   donc la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

3) La situation 2

**Partie D – Étude d'une suite**

1) $U_1 = 0{,}9\, U_0 + 50 = 0{,}9 \times 3000 + 500 = 3200$
   Donc 3200 clients en 2018

2) $V_{n+1} = U_{n+1} - 5000 = 0{,}9\, U_n + 500 - 5000 = 0{,}9\, U_n - 4500$

   Avec $V_n = U_n - 5000$ donc avec $U_n = V_n + 5000$

   $V_{n+1} = 0{,}9\,(V_n + 5000) - 4500 = 0{,}9\, V_n + 4500 - 4500$

   On obtient : $V_{n+1} = 0{,}9\, V_n$, pour tout entier $n$, donc la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 0,9.

3) $V_n = V_0\, q^n = (U_0 - 5000) \times 0{,}9^n = -2000 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel $n$.
4) $U_n = V_n + 5000 = 5000 - 2000 \times 0{,}9^n$ ; pour tout entier naturel $n$.
5) $n = 6$ en 2023
   $U_6 = 5000 - 2000 \times 0{,}9^6 \approx 3937$ donc 3937 clients en 2023
6)
- La valeur de la variable $n$ après l'exécution de cet algorithme est 8 car :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| u | 3000 | 3200 | 3380 | 3542 | 3687,8 | 3819,02 | 3937,118 | 4043,4062 |

- Interprétation : si 3000 clients en 2017 et 3200 en 2018

| année | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| u | 3000 | 3200 | 3380 | 3542 | 3687,8 | 3819,02 | 3937,118 | 4043,4062 |

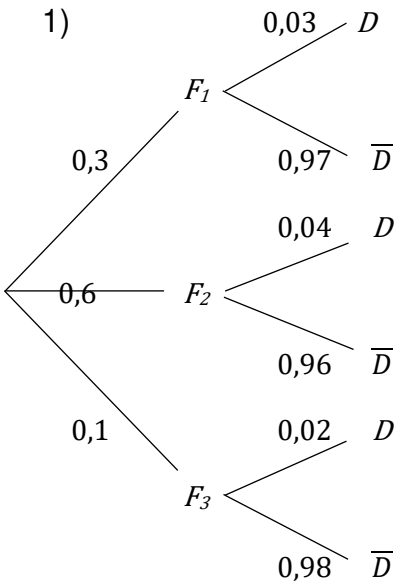
À partir de l'année 2024, le nombre de clients de l'entreprise est supérieur à 4000.

*Remarque : si l'algorithme commençait par $n \leftarrow 0$ (pour l'année 2017) alors la valeur de la variable n après l'exécution de cet algorithme est 7 et l'interprétation est la même.*

## EXERCICE 2

### Partie A. Probabilités conditionnelles

1)




1) $P(F_1 \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009$
2) $P(D) = 0{,}009 + 0{,}6 \times 0{,}04 + 0{,}1 \times 0{,}02 = 0{,}009 + 0{,}024 + 0{,}002 = 0{,}035$

3) $P_D(F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}035} \approx 0{,}257$

### Partie B. Loi binomiale et loi normale

1) a) La variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres
$n = 200$ et $p = 0{,}035$

b) $P(6 \leq X \leq 10)$
$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
$\approx 0{,}15090 + 0{,}15168 + 0{,}13272 + 0{,}10269 + 0{,}07114 \approx 0{,}609$

Ou plus rapidement :
$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) \approx 0{,}9053 - 0{,}2962 \approx 0{,}609$

Ou directement $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0{,}609$ avec la calculatrice NUMWORKS

2) a) espérance : $np = 200 \times 0{,}035 = 7$
écart type : $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0{,}035 \times (1 - 0{,}035)} \approx 2{,}599$

b) $P(5{,}5 \leq Y \leq 10{,}5) \approx 0{,}629$

Interprétation : c'est une valeur approchée de la probabilité $P(6 \leq X \leq 10)$, c'est-à-dire la probabilité que le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon soit compris au sens large entre 6 et 10.

**Partie C. Loi exponentielle**

1) $E(T) = \frac{1}{0,2} = 5$

   Sur un grand nombre d'appels, le temps d'attente est proche de 5 minutes

2) $P(2 \leq T \leq 4) = e^{-0,2x2} - e^{-0,2 \times 4} \approx 0,221$

**Partie D. Estimation**

1) $f = \frac{80}{100} = 0,8$

2) L'intervalle de confiance est : $\left[f - 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

   Ce qui donne $\left[0,8 - 1,65\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} \; ; \; 0,8 + 1,65\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}}\right]$

   $\left[0,8 - 1,65\sqrt{\frac{0,16}{100}} \; ; \; 0,8 + 1,65\sqrt{\frac{0,16}{100}}\right]$

   $\left[0,8 - 0,066 \; ; \; 0,8 + 0,066\right]$

L'intervalle de confiance recherché est : $\left[0,734 \; ; \; 0,866\right]$

3) $1,65\sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq 0,03$

   $\sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq \frac{0,03}{1,65}$

   $\frac{0,16}{n} \leq \left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2$

   $\frac{0,16}{\left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2} \leq n$

   $n \geq 484$

   Interprétation :

   Avec un échantillon d'au moins 484 clients sur lequel on obtiendrait une estimation ponctuelle de 0,8 et avec le même coefficient de confiance, l'intervalle de confiance serait alors $\left[0,8 - 0,03 \; ; \; 0,8 + 0,03\right]$.

   484 est la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,06 ou une estimation avec une marge d'erreur de 0,03.