

# BTS OPTICIEN LUNETIER

## MATHÉMATIQUES

Session 2023

---

Durée : 2 heures  
Coefficient : 2

---

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.  
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

BTS OPTICIEN LUNETIER		Session 2023
Mathématiques	Code : 23OLMAT	Page : 1/8

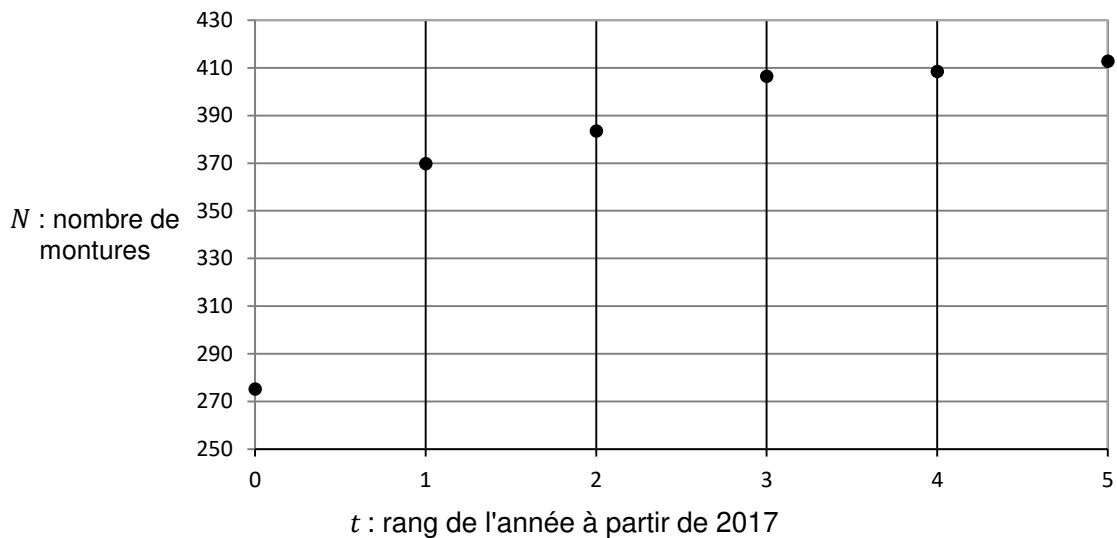
## EXERCICE 1 (10 points)

On s'intéresse à une entreprise qui commercialise des montures de lunettes.

*Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

### Partie A – Étude d'une série statistique.

Le graphique ci-dessous représente l'évolution des ventes d'un modèle de monture de lunettes depuis l'année 2017.



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de  $N$  en  $t$  n'est pas pertinent.

2. On effectue le changement de variable  $z = \ln(415 - N)$ .

On obtient alors le tableau suivant :

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
$t$	0	1	2	3	4	5
$z$	4,94	3,81	3,45	2,14	1,86	0,77

a. À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série  $(t ; z)$ . Arrondir à  $10^{-3}$ .

b. Un ajustement affine de  $z$  en  $t$  est-il pertinent ? Justifier.

3. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de  $z$  en  $t$ , selon la méthode des moindres carrés, sous la forme  $z = at + b$ .

Les coefficients  $a$  et  $b$  seront arrondis à  $10^{-2}$ .

4. En déduire une expression de  $N$  à l'aide de  $t$  sous la forme :

$$N = 415 - Ce^{-0,8t},$$

où  $C$  est une constante que l'on déterminera, à l'unité près.

5. On suppose que l'évolution constatée se poursuit.  
Quel sera le nombre de montures vendues en 2023 ?

### Partie B – Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5y' + 4y = 1660,$$

où  $y$  est une fonction inconnue de la variable  $t$ , définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , et où  $y'$  est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + 4y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle $I$
$ay' + by = 0$	$f(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit  $c$  un nombre réel. On considère la fonction constante  $g$ , définie par  $g(t) = c$ .  
Déterminer  $c$  pour que la fonction  $g$  soit solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. Déterminer la fonction  $f$ , solution de l'équation différentielle  $(E)$ , qui vérifie la condition initiale  $f(0) = 290$ .

### Partie C – Étude d'une fonction.

On considère la fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = 415 - 125e^{-0,8t}.$$

On admet que cette fonction modélise l'évolution du nombre de montures vendues en fonction du temps :

$t$  désigne le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2017.

$f(t)$  désigne le nombre de montures vendues.

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et peuvent être utilisés dans les questions suivantes.

1	dérivée( $415 - 125e^{-0,8t}$ ) → $100 e^{-\frac{4}{5}t}$
2	intégrale( $415 - 125e^{-0,8t}, t$ ) → $\frac{625}{4} e^{-\frac{4}{5}t} + 415 t + c_1$
3	Limite( $415 - 125 e^{-0,8t}, \infty$ ) → $415$
4	PolynômeTaylor( $415 - 125 e^{-0,8t}, t, 0, 2$ ) → $290 + 100 t - 40 t^2$

1. On sait que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote en  $+\infty$ .

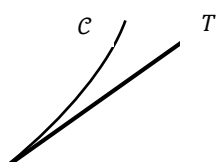
Donner une équation de cette asymptote.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

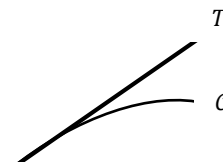
2. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

3. On note  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

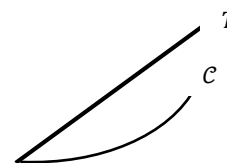
Indiquer, sans justifier, laquelle des trois situations ci-dessous représente correctement la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la tangente  $T$  au voisinage de zéro.



Situation 1



Situation 2



Situation 3

### Partie D – Étude d’une suite.

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3000$ , et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 500.$$

La suite  $(u_n)$  représente l’évolution du nombre de clients de l’entreprise.  
Ainsi,  $u_n$  correspond au nombre de clients durant l’année  $2017+n$ .

1. Vérifier que le nombre de clients lors de l’année 2018 est égal à 3200.

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n - 5000$ .  
Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9.

3. Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ , le terme  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 5000 - 2000 \times 0,9^n .$$

5. Déterminer le nombre de clients lors de l’année 2023.

6. On considère l’algorithme suivant :

```
n ← 1
u ← 3000
Tant que u ≤ 4000
    n ← n+1
    u ← 0,9*u +500
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable  $n$  après l’exécution de l’algorithme ?  
Interpréter ce résultat dans le contexte de l’énoncé.

## EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des verres ophtalmiques à partir de verres semi-finis.

*Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

*Les résultats approchés sont à arrondir à  $10^{-3}$ .*

### Partie A. Probabilités conditionnelles.

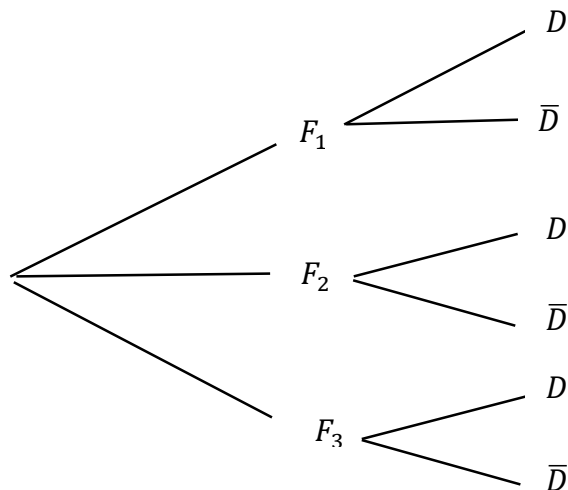
L'usine se procure des verres semi-finis auprès de trois fournisseurs différents :

- 30 % des verres semi-finis proviennent d'un premier fournisseur.  
→ Parmi eux, 3% sont défectueux.
- 60 % des verres semi-finis proviennent d'un deuxième fournisseur.  
→ Parmi eux, 4 % sont défectueux.
- 10 % des verres semi-finis proviennent d'un troisième fournisseur.  
→ Parmi eux, 2 % sont défectueux.

On prélève un verre semi-fini au hasard. On considère les événements suivants :

- $F_1$  : « le verre semi-fini provient du premier fournisseur »,  
 $F_2$  : « le verre semi-fini provient du deuxième fournisseur »,  
 $F_3$  : « le verre semi-fini provient du troisième fournisseur »,  
 $D$  : « le verre semi-fini est défectueux ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité  $P(F_1 \cap D)$ .

3. Montrer que la probabilité que le verre semi-fini soit défectueux est égale à 0,035.

4. On sait que le verre semi-fini est défectueux.

Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

### Partie B. Loi binomiale et loi normale.

On estime que 3,5% des verres semi-finis du stock de l'usine sont défectueux.

On prélève un échantillon aléatoire de 200 verres semi-finis dans le stock de l'usine.

On considère la variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon.

1. a. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale.

Donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité  $P(6 \leq X \leq 10)$ .

2. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  par une loi normale d'espérance 7 et l'écart type 2,599.

a. Justifier la valeur de ces paramètres.

b. On considère  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 7 et d'écart type 2,6.

Calculer  $P(5,5 \leq Y \leq 10,5)$ .

Interpréter dans le contexte.

### Partie C. Loi exponentielle.

On s'intéresse au standard téléphonique de l'usine.

On considère  $T$  la variable aléatoire qui, à chaque appel au standard, associe le temps d'attente, en minutes.

On admet que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,2$ .

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$E(T) = \frac{1}{\lambda}$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $T$ .

Interpréter dans le contexte.

2. On considère un appel au standard, choisi au hasard.

Déterminer la probabilité que le temps d'attente correspondant à cet appel soit compris entre 2 et 4 minutes.

## Partie D. Estimation

L'usine souhaite estimer la proportion  $p$  de clients satisfaits d'un nouveau verre.

Sur un échantillon de 100 clients choisis au hasard, 80 d'entre eux ont déclaré être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle  $f$  de la proportion  $p$ .
2. Donner une estimation de  $p$  par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance de 90 %.

On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un coefficient de confiance de 90%

$$\left[ f - 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

3. Déterminer les entiers naturels  $n$  vérifiant l'inégalité :  $1,65 \sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq 0,03$ .

Interpréter le résultat dans le contexte.