BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2024

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.

EXERCICE 1

Partie A. Étude d'une série statistique

1. Un ajustement affine de y en t n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.
2.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (en °C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln(y - 28)$	4,80	4,44	3,99	3,61	3,18	2,77	2,48

a. La corrélation linéaire de la série $(t\,;z)$ est bonne car r ≈ - 1.

b. Le nuage de points $(t\,;z)$ n'a pas une allure croissante mais décroissante car $r < 0$

4. $z = -0{,}4\,t + 4{,}8$

5. $z = \ln(y - 28) = -0{,}4t + 4{,}8$

$$y - 28 = e^{-0{,}4t + 4{,}8}$$

$$y = e^{-0{,}4t + 4{,}83} + 28$$

$$y = e^{-0{,}4t} \times e^{4{,}83} + 28$$

y est de la forme $y = C\,e^{-0{,}4t} + 28$ avec $C = e^{4{,}8} \approx 122$

Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}t} = k\,e^{-0,4t}$ où $k \in \mathbb{R}$

2.
   - La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(t) = 0$
   - La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) donc

     $5\,g'(t) + 2\,g(t) = 56$, pour tout t de $[0\,;+\infty[$

     $0 + 2\,c = 56$

     Donc $c = \dfrac{56}{2} = 28$

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = k\,e^{-0,4t} + g(t) = k\,e^{-0,4t} + 28$ où $k \in \mathbb{R}$

4. $f(0) = 150$

   $k\,e^{0} + 28 = 150$

   $k = 150 - 28 = 122$

   Conclusion : La fonction f recherchée est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

   $$f(t) = 122\,e^{-0,4t} + 28$$

Partie C. Étude d'une fonction

1. La limite de f en $+\infty$ est égale à 28. C'est cohérent avec le contexte de l'exercice car au bout d'un long moment, le matériau est à la température ambiante de 28°C.

2. a. $f(t) \leq 50$

   $122\,\mathrm{e}^{-0,4t} + 28 \leq 50$

   $122\,\mathrm{e}^{-0,4t} \leq 50 - 28$

   $\mathrm{e}^{-0,4t} \leq \dfrac{22}{122}$ et $\dfrac{22}{122} = \dfrac{11}{61}$

   donc la condition revient à résoudre l'inéquation : $\mathrm{e}^{-0,4t} \leq \dfrac{11}{61}$

b. $e^{-0,4t} \leq \frac{11}{61}$

$-0,4t \leq \ln(\frac{11}{61})$

$t \geq \frac{\ln(\frac{11}{61})}{-0,4}$

avec $\frac{\ln(\frac{11}{61})}{-0,4} \approx 4,282$

et $4,282$ minutes $\approx$ 4 minutes et $0,282 \times 60$ secondes $\approx$ 4 min et $16,92$ s

La température du matériau devient inférieure à 50°C à partir de 4 min et 17 s

3. $F(t) = -305e^{-0,4t} + 28t$

- Déterminons $F'(t)$: $F'(t) = -305 \times (-0,4)e^{-0,4t} + 28 = 122\, e^{-0,4t} + 28$
- On a bien $F'(t) = f(t)$, pour tout t de l'intervalle $[0\,; +\infty[$,

donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.

4. $M = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,dt = \frac{1}{6}\,[F(t)]_0^6 = \frac{1}{6}\left(F(6) - F(0)\right)$

$$M = \frac{-305e^{-2,4}+168-(-305e^{0}+0)}{6} = \frac{-305e^{-2,4}+473}{6} \approx 74,2$$

La température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four est d'environ $74,2$°C.

EXERCICE 2

Partie A. Probabilités conditionnelles

1. $\mathrm{P}(L \cap S) \ = \ 0{,}165$
2. $\mathrm{P}(L \cup S) \ = \ P(L) + P(S) - P(L \cap S) \ = \ 0{,}34 + 0{,}30 - 0{,}165 \ = \ 0{,}475$
3. $P_S(L) = \dfrac{P(L \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}165}{0{,}30} = 0{,}55$ (déjà placé dans l'arbre dans la question 5)
4. $P_S(L) = 0{,}55$ est différent de $P(L) = 0{,}34$ donc les évènements L et S ne sont pas indépendants.

   Ou car : $P(L) \times \mathrm{P}(S) = 0{,}34 \times 0{,}30 = 0{,}102 \neq \mathrm{P}(\mathrm{L} \cap \mathrm{S})$

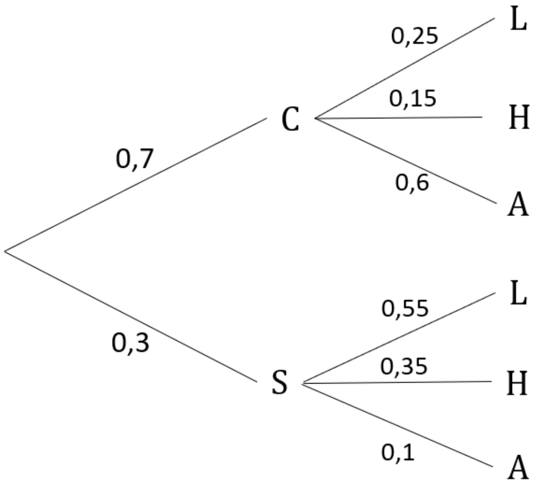
5. Déterminons les probabilités conditionnelles :

$\mathrm{P_C}(\mathrm{L}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{L} \cap \mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})} = \dfrac{0{,}175}{0{,}70} = \dfrac{17{,}5}{70} = 0{,}25$

$\mathrm{P_C}(\mathrm{H}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{H} \cap \mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})} = \dfrac{10{,}5}{70} = 0{,}15$ (déjà placé dans l'arbre)

$\mathrm{P_C}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})} = \dfrac{42}{70} = 0{,}6$ puis $\mathrm{P_S}(\mathrm{H}) = \dfrac{10{,}5}{30} = 0{,}35$ et $\mathrm{P_S}(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{30} = 0{,}1$

L'arbre complet :



Partie B. Loi binomiale

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 90$ et $p = 0{,}62$

   Son espérance est : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 90 \times 0{,}62 = 55{,}8$
2. $P(X = 55) \approx 0{,}085$

3. 50% des 90 clients correspond à 45 clients,

   et la probabilité qu'il y ait au moins 45 clients retraités est :

   $P(X \geq 45) = \ 1 - P(X \leq \ 44) \ \approx 1 - 0{,}008 \ \approx \ 0{,}992$

   (ou directement avec la calculatrice NumWorks)

Partie C. Loi normale

1. $\mu = 100\,000$ (C'est l'abscisse du maximum de la courbe)

2. $P(70000 \leq Z \leq 130000) = P(100000 - 30000 \leq Z \leq 100000 + 30000) = 0{,}95$
   Et on sait que : $P(100\,000 - 2\,\sigma \leq Z \leq 100\,000 + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$
   On en déduit : $2\sigma \approx 30\,000$ et finalement $\sigma \approx \frac{30\,000}{2}$ donc $\sigma \approx 15\,000$

3. $P(Z \geq 80\,000) \approx 0{,}909$

4. Si le chiffre d'affaires de l'opticien augmente de 30%, il serait égal à :
   $80\,000 \times (1+\frac{30}{100}) = 104\,000$ euros.
   L'opticien embauche si son chiffre d'affaires est de 104 000 euros (ou plus).

   Et $P(Z \geq 104\,000) \approx 0{,}395$.
   La probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé est donc d'environ $0{,}395$.

Partie D. Test d'hypothèse

1. Sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire F suit la loi normale d'espérance $p = 0{,}55$ et d'écart type $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}55(1-0{,}55)}{130}} \approx 0{,}044$

2. $h = 2 \times 0{,}044 \approx 0{,}088$

3.

- On a donc $P(0{,}55 - 0{,}088 \leq F \leq 0{,}55 + 0{,}088) = 0{,}95$

  donc $P(0{,}462 \leq F \leq 0{,}638) = 0{,}95$

- Énonçons la règle de décision de ce test :

On prend un échantillon de 130 clients et on calcule la fréquence f de clients qui sont venus en voiture. Si $f \in [\,0{,}462\,;\ 0{,}638]$ alors on accepte H_0 Sinon on rejette H_0 au seuil de 5%

- Utilisation du test avec l'échantillon : $f = \frac{88}{130} \approx 0{,}677$

  $0{,}677 \notin [\,0{,}462\,;\ 0{,}638]$ donc, au seuil de 5%, on rejette H_0.

  On peut donc conclure que, contrairement à ce que dit l'opticien, la proportion de ses clients qui viennent en voiture n'est pas égale à 55%.