**BTS OPTICIEN LUNETIER**

MATHÉMATIQUES

SESSION 2025

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

**l'Institut et Campus d'Optique de Bures-sur-Yvette.**

ICO INSTITUT & CAMPUS D'OPTIQUE

## EXERCICE 1

### Partie A. Statistique

1. $r \approx 0{,}994$.
2. Un ajustement affine de $y$ en $x$ est justifié car r $\approx 1$.
3. $y = 0{,}8\,x + 13{,}7$
4. $y = 0{,}8 \times 10 + 13{,}7 = 21{,}7$

   donc lorsque le prix de vente d'une monture est égal à $10$ euros, la recette de l'usine est de $21\,700$ €.
5. L'écart est : $21\,970 - 19\,950 = 1\,750$ €

   En pourcentage par rapport au prix réel : $\frac{1\,750}{19\,950} \times 100 \approx 8{,}8\%$

   L'écart étant supérieur à 5%, le modèle étudié ici n'est pas fiable.

## Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle $(E_0)$ sont les fonctions $f$ définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = k\,e^{-0,1x}$ ; $k \in \mathbb{R}$

2.a. On pose $\begin{cases} u(x) = 5x \\ v(x) = e^{-0,1x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 5 \\ v'(x) = -0,1\,e^{-0,1x} \end{cases}$

donc $g'(x) = 5\,e^{-0,1x} + 5x\,(-0,1\,e^{-0,1x}) = 5\,e^{-0,1x} - 0,5x\,e^{-0,1x}$

2.b. $g'(x) + 0,1\,g(x) = 5\,e^{-0,1x} - 0,5x\,e^{-0,1x} + 0,1(5x)\,e^{-0,1x}$

$= 5\,e^{-0,1x} - 0,5x\,e^{-0,1x} + 0,5x\,e^{-0,1x} = 5\,e^{-0,1x}$, pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$ donc la fonction $g$ est une solution particulière de $(E)$.

3.a. Les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont les fonctions $h$ définies sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = k\,e^{-0,1x} + g(x) = k\,e^{-0,1x} + 5x\,e^{-0,1x}$

$= (5x + k)\,e^{-0,1x}$ ; $k \in \mathbb{R}$

3.b. $h(5) = (25 + k)\,e^{-0,5} = 17,72$ donc $25 + k = \frac{17,72}{e^{-0,5}}$

et finalement $k = \frac{17,72}{e^{-0,5}} - 25 \approx 4,22$

## Partie C. Étude d'une fonction

1. $f(5) \approx 17{,}72$ et $f(15) \approx 17{,}68$

2.a.

$f'(x) \geq 0$

$4{,}578 - 0{,}5x \geq 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive

$4{,}578 \geq 0{,}5x$

$\frac{4{,}578}{0{,}5} \geq x$

$x \leq 9{,}156$

0n obtient ainsi :

| x | 5 | | 9,156 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f '(x) | | + | 0 | − | |

2.b. $f(9{,}156) \approx 20{,}014$

2.c. On a donc :

| x | 5 | | 9,156 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f '(x) | | + | 0 | − | |
| Variation de f | 17,72 | ↗ | 20,014 | ↘ | 17,68 |

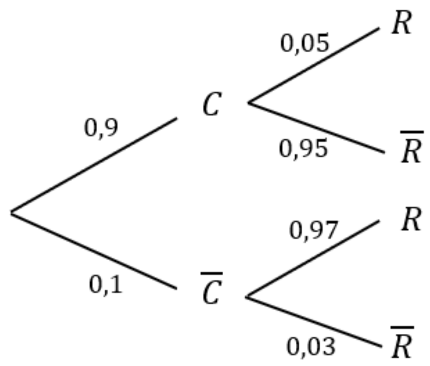
3.

- D'après ce tableau, le prix de vente d'une monture doit être de 9,156 €
- La recette est alors d'environ 20 014 €

## EXERCICE 2

### Partie A. Probabilités conditionnelles

1.




2. $\mathrm{P}(C \cap R) = 0{,}9 \times 0{,}05 = 0{,}045$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = 0{,}045 + 0{,}1 \times 0{,}97 = 0{,}045 + 0{,}097 = 0{,}142$

4. $\mathrm{P_R}\,(\mathrm{C}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{R})} = \dfrac{0{,}045}{0{,}142} \approx 0{,}317$

   $0{,}317 > \dfrac{1}{4}$ donc le responsable a raison.

5. La machine commet une erreur quand une pièce est :
   - conforme et refusée

     ou
   - non conforme et acceptée.

   Donc la probabilité demandée donc est :

   $\mathrm{P}(C \cap R) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{C}} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}1 \times 0{,}03 = 0{,}048$

### Partie B. Loi binomiale et loi normale

1. La variable aléatoire $\mathrm{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $1000$ et $0{,}142$.

2. $0{,}12 \times 1000 = 120$ et la probabilité qu'au plus 120 montures de l'échantillon aient été refusées défectueuses est : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 120) \approx 0{,}024$.

3. La loi de la variable aléatoire $X$ peut être approchée par la loi normale

   - de moyenne : $m = np = 1000 \times 0{,}142 = 142$
   - d'écart type : $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}142 \times (1-0{,}142)} \approx 11$

4. $b = 142$ car c'est la moyenne
   La probabilité de la zone brisée est de $0{,}95$ ;
   on sait que $P(142 - h \leq Y \leq 142 + h) \approx 0{,}95$ si $h = 2 \times 11$
   on en déduit : $a = 142 - h = 142 - 22 = 120$
   $c = 142 + h = 142 + 22 = 144$

## Partie C. Test d'hypothèse

1. $h = 2 \times \frac{0{,}1}{\sqrt{400}} = 0{,}01$. On a donc $P(2{,}99 \leq \overline{L} \leq 3{,}01) = 0{,}95$.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 400 vis du stock et on calcule la longueur moyenne $\bar{\ell}$ des longueurs des vis.

   Si $\bar{\ell} \in [2{,}99 ; 3{,}01]$ alors on accepte l'hypothèse nulle $H_0$

   Sinon, on rejette $H_0$,

   Ceci au seuil de signification de 5 %.

3. $\bar{\ell} = 2{,}996 \in [2{,}99 ; 3{,}01]$ donc on accepte $H_0$, au seuil de 5 %.
   On considère donc que la moyenne des longueurs des vis du stock est égale à 3 mm.