BTS OPTICIEN-LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2025

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel autorisé :

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)

Une usine produit des montures de lunettes et les vend à des opticiens.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Statistique

On étudie la relation entre le prix de vente d'une monture et la recette de l'usine.

Une enquête a permis d'obtenir le résultat suivant.

x Prix de vente d'une monture, en euros	5	5,5	6	6,5	7	7,5
y Recette de l'usine, en milliers d'euros	17,72	18,21	18,74	19,12	19,35	19,85

Ainsi, lorsque le prix de vente d'une monture est égal à 5 euros, la recette de l'usine est égale à $17{,}72$ milliers d'euros, soit $17\,720$ euros.

1. Donner, à l'aide de la calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, y). On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Expliquer pourquoi un ajustement affine de y en x est justifié.

3. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de y en x, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$.
Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-1}.

4. Selon ce modèle, quelle est la recette de l'usine, lorsque le prix de vente d'une monture est égal à 10 euros ? Arrondir à l'euro près.

5. Une étude montre que, lorsque le prix de vente d'une monture est égal à 10 euros, la recette de l'usine est, en réalité, égale à $19\,950$ euros.

Lorsque l'écart entre la valeur donnée par un modèle statistique et la valeur réelle est inférieur à 5 %, on dit que le modèle est *fiable*.

Le modèle étudié ici est-il fiable ? Justifier.

Partie B. Équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' + 0{,}1y = 5\mathrm{e}^{-0{,}1x}\,,$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\ y' + 0{,}1y = 0\,.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, $\quad \mathrm{k} \in \mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par :

$$g(x) = 5x\mathrm{e}^{-0{,}1x}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

2.a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On fournit les formules suivantes :

Fonction	Dérivée
uv	$u'v + uv'$
$x \longmapsto \mathrm{e}^{Ax}$	$x \longmapsto A\mathrm{e}^{Ax}$

2.b. En déduire que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3.a. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions h définies pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par :

$$h(x) = (5x + k)\mathrm{e}^{-0{,}1x}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

3.b. Déterminer, à 10^{-2} près, la valeur de la constante k pour que la fonction h ci-dessus vérifie :

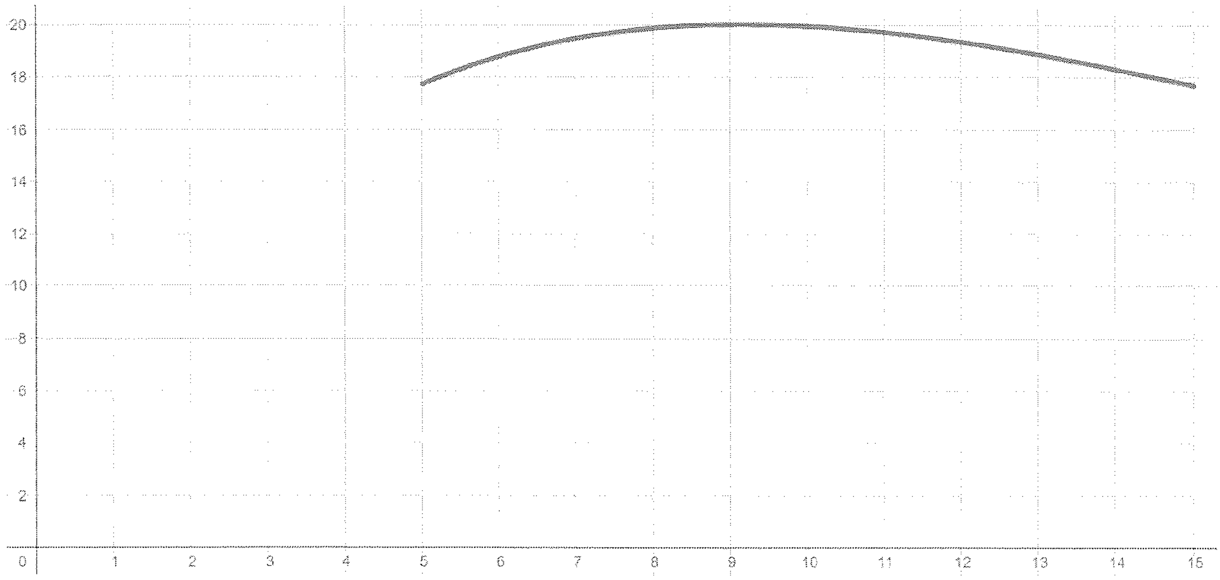
$$h(5) = 17{,}72.$$

Partie C. Étude de fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[5\,;\,15]$ par :

$$f(x) = (5x + 4{,}22)\mathrm{e}^{-0{,}1x}.$$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Calculer les valeurs approchées à 10^{-2} de $f(5)$ et $f(15)$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[5\,;\,15]$ et on note f' sa fonction dérivée. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[5\,;\,15]$ on a :

$$f'(x) = (4{,}578 - 0{,}5x)\mathrm{e}^{-0{,}1x}.$$

2.a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[5\,;\,15]$.

2.b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de $f(9{,}156)$.

2.c. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,15]$.

3. On suppose que la fonction f modélise la recette de l'entreprise en fonction du prix de vente d'une monture. Ainsi, lorsque le prix de vente d'une monture, en euros, est égal à x, la recette de l'usine, en milliers d'euros, est égale à $f(x)$.

Quel doit-être le prix de vente d'une monture pour que la recette soit maximale ?
À combien s'élève alors la recette ?

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Une machine contrôle des montures de lunettes.
Cette machine commet des erreurs : il arrive que des montures conformes soient REFUSÉES, et que des montures non conformes soient ACCEPTÉES.

On dispose des informations suivantes :

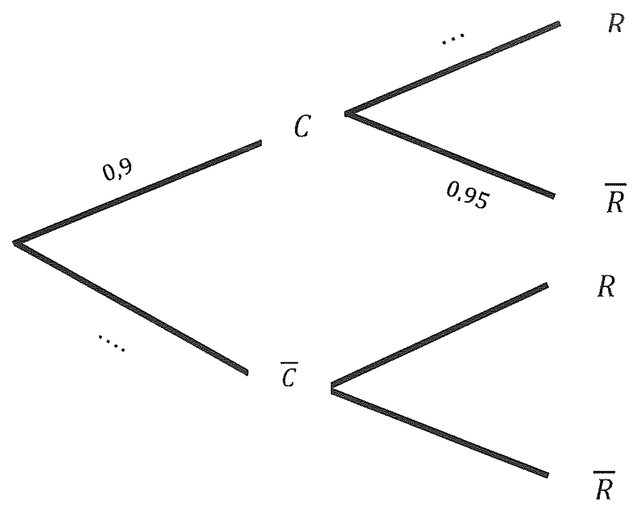
- $90\ \%$ des montures sont conformes.
  Parmi elles, $5\ \%$ sont REFUSÉES.

- $10\ \%$ des montures sont non conformes.
  Parmi elles, $97\ \%$ sont REFUSÉES.

On prélève au hasard une monture et on considère les évènements :

C : la monture est conforme.
R : la monture est refusée.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Déterminer la probabilité que la monture soit conforme et refusée.

3. Montrer que la probabilité que la monture soit refusée est égale à $0{,}142$.

4. Un technicien affirme : « *Parmi les montures refusées, plus du quart sont conformes* ».
A-t-il raison ? Justifier.

5. Quelle est la probabilité que la machine commette une erreur ?

Partie B. Loi binomiale et loi normale

On considère un grand stock de montures de lunettes. On sait que la proportion de montures ayant été refusées au contrôle de conformité est égale à $0{,}142$.

On prélève au hasard un échantillon de 1000 montures.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de montures qui, au sein de l'échantillon de 1000 montures, ont été refusées au contrôle de conformité.

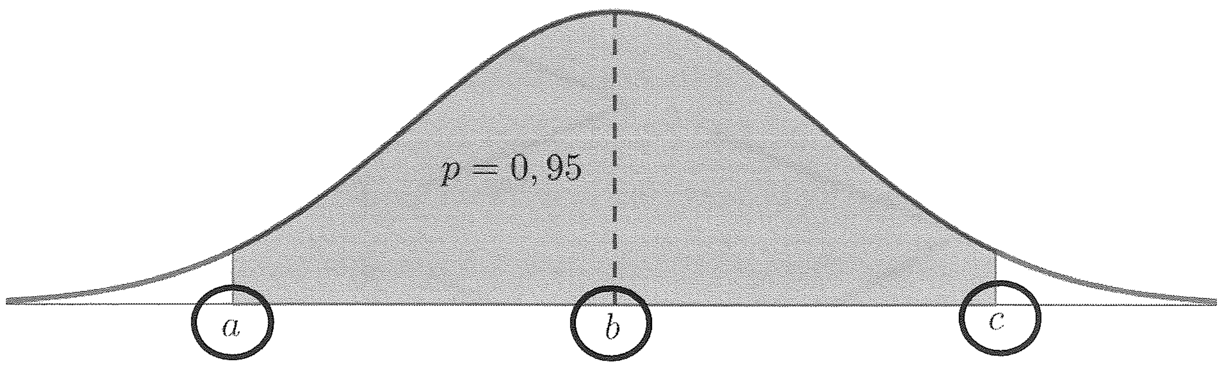
1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'au plus $12\ \%$ des montures de l'échantillon aient été refusées. Arrondir à 10^{-3}.

3. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale, ayant pour moyenne $m = 142$ et pour écart-type $\sigma = 11$.

Justifier les valeurs de m et σ.

4. On a représenté ci-dessous la densité de la loi normale de moyenne $m = 142$ et d'écart-type $\sigma = 11$.



La zone grisée est disposée symétriquement par rapport à l'axe de symétrie de la courbe. Elle représente une probabilité égale à $0{,}95$.

Donner une valeur approchée du réel b puis des réels a et c.

Partie C. Test d'hypothèse

Une usine possède un grand stock de vis destinées à l'assemblage des montures. La longueur des vis doit être égale à 3mm. Afin de contrôler cette longueur, on prélève un échantillon aléatoire de 400 vis et on réalise un test bilatéral au seuil de signification de $5\ \%$.

Notations :
L désigne la variable aléatoire qui donne la longueur (en millimètres) d'une vis prise au hasard dans le stock. Cette variable aléatoire suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $0{,}1$.

$\overline{L}$ désigne la variable aléatoire qui donne la moyenne des longueurs (en millimètres) des vis d'un échantillon aléatoire de 400 vis.

Hypothèses :
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 3$.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 3$.

1. On se place sous l'hypothèse nulle.
On admet que, sous cette hypothèse, la variable aléatoire $\overline{L}$ suit une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type $\frac{0{,}1}{\sqrt{400}}$.
Déterminer le réel positif h vérifiant $P(3 - h < \overline{L} < 3 + h) = 0{,}95$. Arrondir à 10^{-2}.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. On prélève un échantillon aléatoie de 400 vis. Les longueurs de ces vis figurent dans le tableau ci-dessous.

Longueur (en mm)	2,98	2,99	3,00	3,01	3,02
Effectif	48	92	240	18	2

3.a. Quelle est la longueur moyenne des vis de cet échantillon ?

3.b. Conclure en appliquant la règle de décision.