EXERCICE 1 **(10 points)**

Partie A – Série statistique

1. Un ajustement linéaire de N en t n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.
2.
   a. $z = \ln\left(\frac{4000}{3120} - 1\right) \approx -1{,}266$
   b. $r < 0$ car les variables t et z varient en sens contraires (quand t augmente, z diminue)
   c. $r \approx -0{,}999$
   Un ajustement linéaire de z en t est pertinent car $r \approx -1$

   d. $z = -1{,}6\,t + 2{,}0$

   e. $$N = \frac{4000}{1 + e^{-1,6t+2}}$$
   $$e^{-1,6t+2} = e^{-1,6t}.e^2 = C\,e^{-1,6t} \quad \text{avec } C = e^2 \approx 7$$
   Donc $N = \dfrac{4000}{1 + Ce^{-1,6t}}$ avec $C \approx 7$

Partie B – Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions h définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $\mathrm{h(t) = k\,e^{-1,6t}}$; $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$

2. $\mathrm{g'(t) = 0}$
   g est solution de (E) donc $\mathrm{g'(t) + 1{,}6g(t) = 1{,}6}$
   $$0 + 1{,}6\,\mathrm{A} = 1{,}6$$
   $$\text{Donc } \mathrm{A} = \frac{1{,}6}{1{,}6} = 1$$

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions h définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $\mathrm{h(t) = k\,e^{-1,6t} + g(t) = k\,e^{-1,6t} + 1}$; $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$

4. $\mathrm{h(0) = 8}$
   $\mathrm{k\,e^0 + 1 = 8}$
   $\mathrm{k + 1 = 8}$
   $\mathrm{k = 8 - 1 = 7}$
   donc la fonction h est définie par $\mathrm{h(t) = 7e^{-1,6t} + 1}$

Partie C – Étude d’une fonction

1. $f(3) \approx 3782$ donc le nombre de verres vendus en avril 2026 est $3\,782$.

2.

a. D’après l’indication numéro 1, la courbe $\mathcal{C}$ admet, en $+\infty$, une asymptote d’équation $y = 4\,000$.

b. D’après l’indication numéro 2, $f\,'(t) = \dfrac{44\,800\; e^{-1.6t}}{(1+7e^{-1.6t})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $f\,'(t) > 0$, pour tout t de $[0\,;+\infty\,[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty\,[$.

$f(0) = 500$ donc le tableau de variation de la fonction f est :

t	0	$+\infty$
Signe de $f\,'(t)$	$+$	
Variations de f	$500 \nearrow$	$4\,000$

c. D’après l’indication numéro 3, $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 500 + 700t$

$f(t) \approx 500 + 700t + 420t^2$

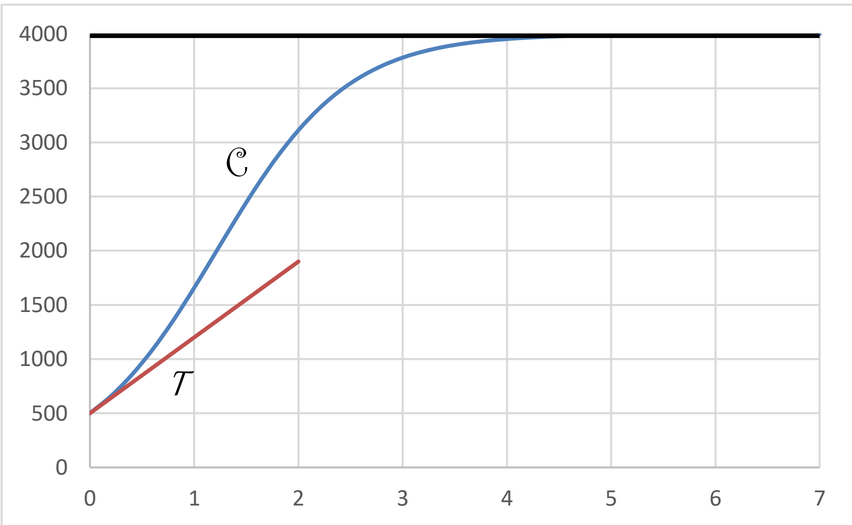
Donc $f(t) - (500 + 700t) \approx 420t^2$ qui est strictement positif pour $t > 0$

Donc, au voisinage de zéro, $f(t) > 500 + 700t$

Donc, au voisinage de zéro, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$.

3. D’après le tableau de variation de la fonction f, $f(t) \leq 4\,000$
donc le chef d’entreprise n’a pas raison, on ne commercialisera jamais plus de $5\,000$ verres.

4. La courbe $\mathcal{C}$ avec l’asymptote et la tangente $\mathcal{T}$



EXERCICE 2 **(10 points)**

Partie A – Probabilités conditionnelles

1.

	Montures présentant un défaut de Charnières	Montures ne présentant pas un défaut de Charnières	Total
Montures présentant un défaut de Batterie	10	50	60
Montures ne présentant pas un défaut de Batterie	20	920	940
Total	30	970	1 000

2. $\mathrm{P(C)} = \dfrac{\text{nombre de montures présentant un défaut de Charnières}}{\text{nombre total de montures}} = \dfrac{30}{1\,000} = 0{,}03$

donc la probabilité que la monture choisie présente un défaut de charnières est égale à $0{,}03$.

3. $\mathrm{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \dfrac{920}{1\,000} = 0{,}92$ donc la probabilité que la monture choisie ne présente aucun défaut est égale à $0{,}92$.

4. $\mathrm{P_B(C)} = \dfrac{\mathrm{P(B \cap C)}}{\mathrm{P(B)}} = \dfrac{\frac{10}{1\,000}}{\frac{60}{1\,000}} = \dfrac{0{,}01}{0{,}06} \approx 0{,}167$

Ou $\mathrm{P_B(C)} = \dfrac{\text{nombre de montures présentant les deux défauts}}{\text{nombre de montures présentant un défaut de Batterie}} = \dfrac{10}{60} \approx 0{,}167$

Partie B – Loi binomiale

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\mathrm{n} = 150$ et $\mathrm{p} = 0{,}06$
2. $\mathrm{P(X \leq 9)} \approx 0{,}587$ donc la probabilité qu'il y ait au maximum 9 montures présentant un défaut de batterie dans le colis est égale à $0{,}587$.
3. $\mathrm{P(X > 12)} = 1 - \mathrm{P(X \leq 12)} \approx 1 - 0{,}883 \approx 0{,}117$

   Ou $\mathrm{P(X > 12)} = \mathrm{P(X \geq 13)} \approx 0{,}117$

   Donc la probabilité que le colis ne soit pas expédié est égale à $0{,}117$
4. $\mathrm{E(X)} = \mathrm{np} = 150 \times 0{,}06 = 9$

   Sur un grand nombre de colis, le nombre moyen de montures dans un colis présentant un défaut de batterie est proche de 9.

Partie C – Loi normale

1. $\mu = 720$

2. L'aire grisée correspond à une probabilité de $0{,}95$
   Donc $P(670 \leq Y \leq 770) = P(720 - 50 \leq Y \leq 720 + 50) = 0{,}95$
   Et on sait que, pour toute loi normale, $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
   On en déduit : $2\sigma \approx 50$ et finalement $\sigma \approx \frac{50}{2}$
   Donc l'écart-type σ est environ égal à 25

3. $P(Y \geq 720) \approx 0{,}5$

   $P(Y \leq 770) \approx 1 - \frac{0{,}05}{2} \approx 0{,}975$ par symétrie de la gaussienne

   (Ou $P(Y \leq 770) \approx 0{,}977$ à 10^{-3} à la calculatrice)

   $P(Y \leq 670) \approx \frac{0{,}05}{2} \approx 0{,}025$ par symétrie de la gaussienne

   (Ou $P(Y \leq 670) \approx 0{,}023$ à 10^{-3} à la calculatrice)

Partie D – Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle de p est : $f = \frac{616}{800} = 0{,}77$

2. L'intervalle de confiance est : $\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\right]$

   Ce qui donne $\left[0{,}77 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}77(1-0{,}77)}{800}}\ ;\ 0{,}77 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}77(1-0{,}77)}{800}}\right]$

   puis $[0{,}77 - 0{,}03\ ;\ 0{,}77 + 0{,}03]$

   L'intervalle de confiance recherché est : $[0{,}74\ ;\ 0{,}80]$

3. L'intervalle de confiance obtenu à la question 2 est modifié car la valeur de n est modifiée ; même si l'estimation ponctuelle est identique. ($\frac{154}{200} = 0{,}77$)

   n étant plus petit, l'amplitude de l'intervalle de confiance est plus grande.

   (on trouve comme intervalle : $\left[0{,}77 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}77(1-0{,}77)}{200}}\ ;\ 0{,}77 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}77(1-0{,}77)}{200}}\right]$

   puis $[0{,}77 - 0{,}06\ ;\ 0{,}77 + 0{,}06]$ et finalement $[0{,}71\ ;\ 0{,}83]$)