BTS OPTICIEN-LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2026

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

<u>Matériel autorisé</u>

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)

Une entreprise commercialise un nouveau type de verres.
On étudie l'évolution des ventes de ce verre.

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

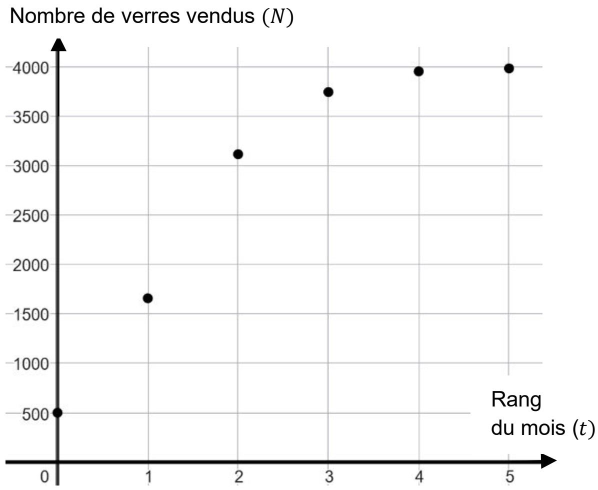
Partie A – Série statistique

L'évolution des ventes mensuelles de ce verre est donnée dans le tableau ci-dessous.

Mois	Janvier 2026	Février 2026	Mars 2026	Avril 2026	Mai 2026	Juin 2026
Rang du mois t	0	1	2	3	4	5
Nombre de verres vendus N	500	1 660	3 120	3 750	3 960	3 990

1. Les données du tableau ont permis de réaliser le graphique ci-contre.

Au vu de ce graphique, un ajustement linéaire de N en t est-il pertinent ? Justifier.



2. On pose le changement de variable

$$z = \ln\left(\frac{4\ 000}{N} - 1\right),$$

et on obtient alors le tableau ci-dessous.

Mois	Janvier 2026	Février 2026	Mars 2026	Avril 2026	Mai 2026	Juin 2026
Rang du mois t	0	1	2	3	4	5
Nombre de verres vendus N	500	1 660	3 120	3 750	3 960	3 990
z	1,946	0,343	….	−2,708	−4,595	−5,989

a. Calculer la valeur de z pour le mois de mars 2026. On arrondira à 10^{-3}.

b. On note r le coefficient de corrélation linéaire de z en t.
Sans calculer la valeur de r, expliquer pourquoi on peut être certain que $r < 0$.

c. Déterminer la valeur, arrondie à 10^{-3}, du coefficient de corrélation linéaire r.
Un ajustement linéaire de z en t est-il pertinent ? Justifier.

d. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de z en t (selon la méthode des moindre carrés) sous la forme $z = at + b$. Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-1}.

e. On admet que la question précédente permet d'en déduire que le nombre de verres vendus N en fonction du rang du mois t est donné par la relation :

$$(R) \quad : \quad N = \frac{4000}{1 + \mathrm{e}^{-1{,}6t+2}} \ .$$

Déterminer la constante C de telle que l'égalité (R) s'écrive :

$$N = \frac{4000}{1 + C\mathrm{e}^{-1{,}6t}} \ .$$

Donner un arrondi de la constante C à l'unité près.

Partie B – Équation différentielle

Le but de cette partie est de résoudre une équation différentielle dont la solution correspond au dénominateur de l'expression obtenue à la question **A.2.e** donnant le nombre de verres vendus N en fonction du rang du mois t.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ y' + 1{,}6y = 1{,}6 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : y' + 1{,}6y = 0 \, .$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, k \in \mathbb{R}$

2. On considère un réel A et la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(t) = A.$$

Déterminer le réel A de telle sorte que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction h, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = 8$.

Partie C – Étude d’une fonction

On considère que l’évolution du nombre de verres vendus est modélisée par la fonction f définie sur l’intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t)=\frac{4000}{1+7\mathrm{e}^{-1,6t}}\ .$$

t désigne le rang du mois à partir de janvier 2026 : ainsi, $t=0$ correspond au mois de janvier 2026 ; $t=1$ correspond au mois de février 2026.

$f(t)$ modélise le nombre de verres vendus.

On admet que la fonction f est dérivable sur l’intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer le nombre de verres vendus en avril 2026.

2. On dispose des trois indications ci-dessous :

- indication numéro1 : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=4\,000$;
- indication numéro 2 : $f'(t)=\dfrac{44\,800\mathrm{e}^{-1,6t}}{(1+7\mathrm{e}^{-1,6t})^2}$;
- indication numéro 3 : le développement limité à l’ordre 2 de $f(t)$ en $t=0$ est :

$$f(t)=500+700t+420t^2+t^2\varepsilon(t)\ ,\text{ où }\lim_{t\to0}\varepsilon(t)=0.$$

À l’aide de ces résultats, répondre aux questions suivantes, en indiquant à chaque fois le numéro de l’indication utilisée.

a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote dont on déterminera une équation.

b. Justifier que la fonction f est croissante sur l’intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Dresser son tableau de variations.

c. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d’abscisse $t=0$.
Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$.
Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ au voisinage de $t=0$.

3. Le chef d’entreprise affirme : « *il arrivera un moment où l’on commercialisera plus de* $5\,000$ *verres par mois.* » A-t-il raison ? Justifier.

4. Réaliser un schéma sommaire donnant l’allure de la courbe $\mathcal{C}$ et sur lequel les résultats des questions **2.a**, **2.b**, **2.c** seront visibles.

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des montures de lunettes dites « montures intelligentes ».
Ces montures sont susceptibles de présenter deux types de défaut :

- un défaut concernant la batterie ;
- un défaut concernant les charnières des branches.

Les quatre parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

Le contrôle-qualité prélève un échantillon $1\,000$ montures sur lequel il examine les éventuels défauts.
Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

	Montures présentant un défaut de Charnières	Montures ne présentant pas un défaut de Charnières	Total
Montures présentant un défaut de Batterie	10	….	60
Montures ne présentant pas un défaut de Batterie	20	….	….
Total	….	….	1000

On choisit au hasard une monture parmi celles de l'échantillon et on note les évènements :
B : « la monture choisie présente un défaut de batterie ».
C : « la monture choisie présente un défaut de charnières ».

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

2. Quelle est la probabilité que la monture choisie présente un défaut de charnières ?

3. Quelle est la probabilité que la monture choisie ne présente aucun défaut ?

4. Déterminer la probabilité de C sachant B, notée $P_B(C)$.

Partie B – Loi binomiale

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

On admet que, dans le stock de montures produites par l'usine, 6 % d'entre elles présentent un défaut de batterie.

On choisit au hasard 150 montures du stock que l'on dispose dans un colis et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de montures du colis présentant un défaut de batterie.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au maximum 9 montures présentant un défaut de batterie dans le colis ?

3. Si, dans le colis, le nombre de batteries présentant un défaut de batteries est strictement supérieur à 12, le colis n'est pas expédié.
Quelle est la probabilité que le colis ne soit pas expédié ?

4. Déterminer l'espérance $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

<u>Partie C – Loi normale</u>

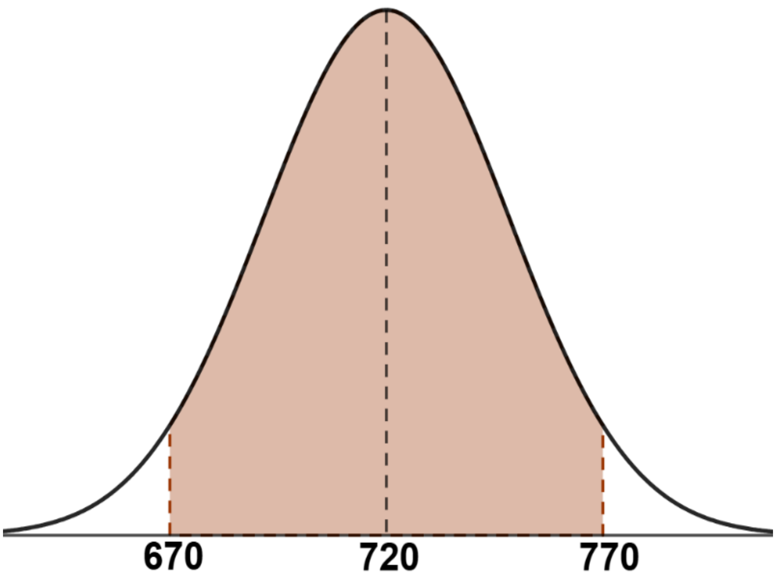
On s'intéresse à la durée de vie des batteries des montures.

On note Y la variable aléatoire qui mesure la durée de vie, en heures, d'une batterie.

On sait que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

La fonction densité de la variable aléatoire Y est représentée ci-contre.

L'aire grisée correspond à une probabilité égale à $0{,}95$.



1. Donner la valeur de la moyenne μ.

2. Justifier que l'écart-type σ est environ égal à 25.

3. Déterminer les probabilités $P(Y \geq 720)$, $P(Y \leq 770)$ et $P(Y \leq 670)$.

Partie D – Intervalle de confiance

Le fabricant souhaite connaître la proportion p de clients satisfaits de cette nouvelle monture.

Il réalise une enquête auprès de 800 clients : 616 déclarent être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion inconnue p avec le niveau de confiance de 95 %. Les bornes de l'intervalle seront arrondies à 10^{-2}.

On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un niveau de confiance de 95 %
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

3. On suppose à présent que l'enquête est réalisée, non pas auprès de 800 clients, mais de 200 clients, et que 154 d'entre eux se déclarent satisfaits.
Dans ce cas, l'intervalle de confiance obtenu à la question **2** est-il modifié ? Justifier.