BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2018

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M DESHAYES, professeur de mathématiques de l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.

EXERCICE 1

A. Étude d'une série statistique

1°) Un ajustement affine de y en x n'est pas approprié car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.

2°)

a) $r \cong -0{,}994$

b) L'ajustement affine de z en x est justifié car le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z) est proche de -1.

3°) $z = -0{,}6\,x + 5{,}3$

4°) $z = \ln(y - 20) = -0{,}6\,x + 5{,}3$

$$y - 20 = e^{-0{,}6\,x + 5{,}3}$$

$$y = e^{-0{,}6\,x + 5{,}3} + 20$$

$$y = e^{5{,}3} \times e^{-0{,}6\,x} + 20$$

y est de la forme $y = A\,e^{-0{,}6\,x} + 20$ avec $A = e^{5{,}3} \cong 200$

B. Résolution d'une équation différentielle

1°) $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} = -0,6$

Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont donc les fonctions f définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = k\,e^{-0,6x}$ où $k \in \mathbb{R}$

2°) La fonction g est dérivable sur [0 ; +∞[et $g'(x) = 0$

La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) donc

$10\,g'(x) + 6\,g(x) = 120$, pout tout x de [0 ; +∞[

$0 + 6\,c = 120$

Donc $c = \frac{120}{6} = 20$

3°) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = k\,e^{-0,6x} + g(x) = k\,e^{-0,6x} + 20$ où $k \in \mathbb{R}$

4°) $f(0) = 220$

$k\,e^{0} + 20 = 220$

$k = 220 - 20 = 200$

Conclusion : f est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = 200\,e^{-0,6x} + 20$

C. Étude d'une fonction

1°) La ligne 1 du logiciel de calcul formel fournit une expression de la dérivée de la fonction f : $f'(x) = -120\,e^{-0,6x}$

$e^{-0,6x} > 0$, pour tout x de [0 ; +∞[donc $f'(x) < 0$, pour tout x de [0 ; +∞[

donc la fonction f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

2°) La ligne 2 du logiciel de calcul formel fournit une expression d'une primitive de la fonction f : $F(x) = -\frac{1000}{3}e^{-0,6\,x} + 20\,x$

La valeur moyenne de f sur [0 ; 10] est : $\frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\,[F(x)]_0^{10}$

$$= \frac{1}{10}\left(F(10) - F(0)\right) = \frac{-\frac{1000}{3}e^{-6} + 200 - \left(-\frac{1000}{3}e^{0}\right)}{10} = \frac{-\frac{1000}{3}e^{-6} + 200 + \frac{1000}{3})}{10} \cong 53$$

La valeur moyenne de f sur [0 ; 10] est d'environ 53.

3°) D'après la question 1°) et la limite de f en $+\infty$ donnée en <u>ligne 3</u> du logiciel, on a :

x	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	20

Donc la valeur minimale de *f* est 20 ; ce qui permet d'affirmer que le nombre de ventes annuelles de paires de ce type de lentilles de couleur ne peut pas être égal à 1500 (15 centaines)

D. Étude d'une suite

1°) $v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0,95\ u_n + 4 - 80 = 0,95\ u_n - 76$

Avec $u_n = v_n + 80$

donc $v_{n+1} = 0,95\ (v_n + 80) - 76 = 0,95\ v_n + 76 - 76 = 0,95\ v_n$, pour tout entier n, donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 80 = 150 - 80 = 70$.

2°) a) $v_n = v_o\ q^n = 70 \times 0,95^n$; pour tout entier n.

b) $u_n = v_n + 80 = 70 \times 0,95^n + 80$; pour tout entier n.

3°) En sortie de l'algorithme, la variable s contient $u_0 + u_1 + \ldots + u_{23}$

donc 2 911est le nombre total de ventes de ces nouvelles lentilles de couleur au cours des 24 premiers mois.

4°) $70 \times 0,95^n + 80 \leq 100$

$70 \times 0,95^n \leq 100 - 80$

$0,95^n \leq 20 / 70$

$\ln(0{,}95^n) \leq \ln(2/7)$

$n \times \ln 0{,}95 \leq \ln(2/7)$

$n \geq \dfrac{\ln(\frac{2}{7})}{\ln 0{,}95}$ avec $\dfrac{\ln(\frac{2}{7})}{\ln 0{,}95} \cong 24{,}4$

Conclusion : Le plus petit entier naturel n tel que $70 \times 0{,}95^n + 80 \leq 100$ est 25.

Interprétation : À partir du 25ème mois, le nombre de clients qui achètent les nouvelles lentilles de couleur est inférieur à 100.

EXERCICE 2

A. Loi exponentielle

1°) $P(T \leq 6) = 1 - e^{-0{,}125 \times 6} \cong 0{,}528$

2°) $P(T > 9) = 1 - P(T \leq 9) = 1 - (1 - e^{-0{,}125 \times 9}) = e^{-0{,}125 \times 9} \cong 0{,}325$

3°) $E(T) = 1/0{,}125 = 8$

Interprétation : Sur une longue période, la durée moyenne de bon fonctionnement de la meuleuse entre deux étalonnages est proche de 8 jours.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1°) a)

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever un seul verreavec :
  Succès : le verre prélevé a un défaut de courbure, de probabilité p = 0,01
  Échec : l'évènement contraire.
- On répète 500 fois cette épreuve de façon identique et indépendante car tirage avec remise.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus.
- Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n = 500 et p = 0,01.

b) $P(X = 5) \cong 0{,}176$
c) $P(X < 4) = P(X \leq 3) \cong 0{,}264$

2°)
a) $\mu = np = 500 \times 0{,}01 = 5$
b) $P(Y \leq 3) \cong 0{,}265$

C. Test d'hypothèse

1°) D'après le théorème de la limite centrée, la variable aléatoire F suit la loi normale :

- d'espérance p qui est égale à 0,10 sous H_0
- d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1\text{-}p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}1(1-0{,}1)}{400}} = 0{,}015$

2°) La valeur approchée au millième de a tel que $P(F \leq a) = 0{,}95$ est : 0,125.

3°) On prélève un échantillon de 400 verres polis dans la production et on calcule la fréquence f des verres défectueux.

Si $f \leq 0{,}125$, alors on accepte H_0

Sinon on rejette H_0

4°) Calcul de f : $f = 46 / 400 = 0{,}115$

Décision : $0{,}115 \leq 0{,}125$ donc on accepte H_0
donc on ne peut pas considérer, au seuil de 5%, qu'il y a plus de 10 % de verres défectueux dans la production des verres polis dans la journée.

D. Évènements indépendants

1°) $P(D \cap E) = P(D) \times P(E)$ car les évènements sont indépendants

$= 0{,}05 \times 0{,}08 = 0{,}004$

2°) $P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$

$= 0{,}05 + 0{,}08 - 0{,}004 = 0{,}126$

3°) La probabilité que le verre contrôlé n'ait aucun défaut est :

$P(\overline{D \cup E}) = 1 - P(D \cup E) = 1 - 0{,}126 = 0{,}874$.