BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2018

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

<u>Tout autre matériel est interdit.</u>

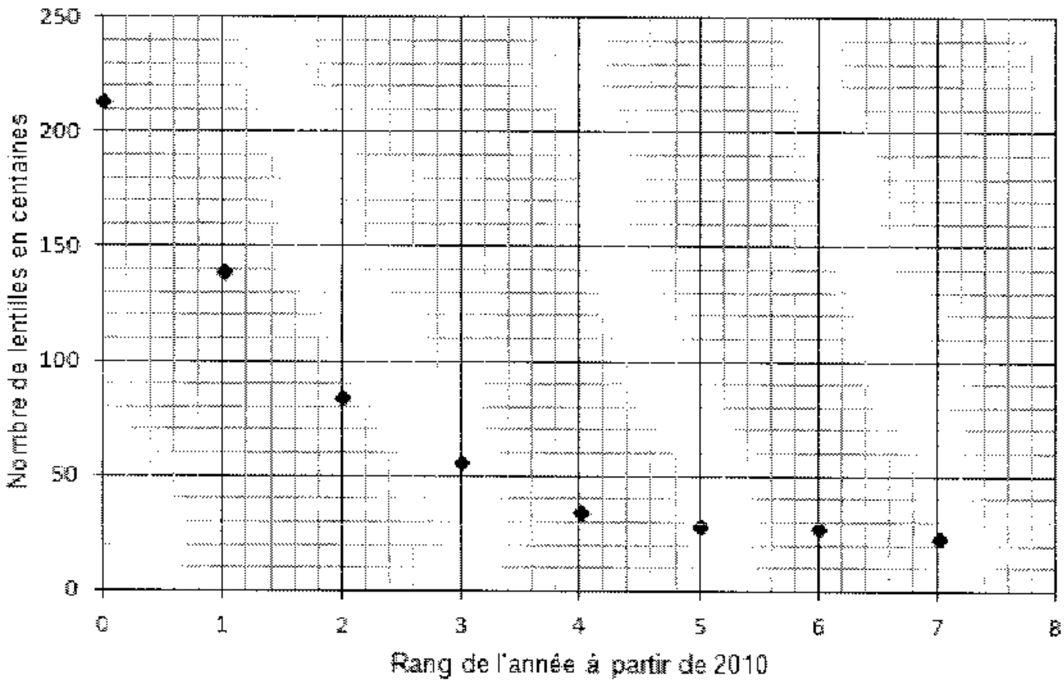
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude d'une série statistique

Le graphique suivant représente l'évolution des ventes d'un certain modèle de lentilles de couleur depuis 2010 par l'entreprise « Beauzyeux ». En abscisse, x correspond au rang de l'année à partir de l'année 2010 et en ordonnée y correspond au nombre de paires de lentilles de couleur de ce modèle vendues durant l'année 2010 + x, exprimé en centaines.



1° À l'aide du graphique et sans calcul, expliquer pourquoi un ajustement affine de y en x n'est pas approprié.

2° On effectue le changement de variable $z = \ln(y - 20)$, et on obtient le tableau suivant :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
x	0	1	2	3	4	5	6	7
z	5,26	4,78	4,16	3,56	2,64	2,08	1,95	1,1

a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z). Arrondir au millième.

b) L'ajustement affine de z en x est-il approprié ? Justifier.

3° Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont arrondis au dixième.

4° En déduire, en utilisant le changement de variable, une expression de y en fonction de x de la forme $y = A\,e^{-0{,}6\,x} + 20$, où A est arrondi à l'unité.

B. Résolution d'une équation différentielle

On modélise l'évolution du nombre de paires, en centaines, d'un certain type de lentilles de couleur vendues par l'entreprise « Beauzyeux » par une fonction solution de l'équation différentielle (E) :

$$10\,y' + 6\,y = 120\,,$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$10\,y' + 6\,y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$a\,y' + b\,y = 0$	$f(x) = k\,e^{-\frac{b}{a}x}$

2° Déterminer le nombre réel c tel que la fonction constante g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = c$ soit une solution de l'équation différentielle (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 220$.

C. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 200\,e^{-0,6\,x} + 20$.
Dans cette partie, on modélise l'évolution du nombre de paires, en centaines, d'un certain type de lentilles de couleur, vendues par l'entreprise « Beauzyeux », en fonction du rang x de l'année après 2010, par la fonction f.

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et peuvent être utilisés dans les questions suivantes.

Calcul formel

1	Dérivée[200exp(-0.6x)+20]
	$\rightarrow\ -120\,e^{-\frac{3}{5}x}$
2	Intégrale[200exp(-0.6x)+20,x]
	$\rightarrow\ -\frac{1000}{3}\,e^{-\frac{3}{5}x} + 20\,x + c_1$
3	Limite[200exp(-0.6x)+20,+inf]
	$\rightarrow\ 20$

1° Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2° Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$, arrondie à l'unité.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

3° D'après le modèle étudié dans cette partie, le nombre de ventes annuelles de paires de ce type de lentilles de couleur peut-il être égal à 1 500 ?

D. Étude d'une suite

Un des magasins de l'entreprise « Beauzyeux » a constaté la progression suivante pour la vente d'un nouveau modèle de lentilles de couleur.
Le premier mois, 150 clients achètent les nouvelles lentilles de couleur. Chaque mois suivant, 5 % des anciens clients ne les rachètent pas alors que quatre nouveaux clients achètent ces lentilles.
On modélise le nombre de clients chaque mois par la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 150$;

$u_{n+1} = 0{,}95\, u_n + 4$, pour tout entier naturel n,

où n représente le rang du mois en prenant $n = 0$ pour le premier mois.
Ainsi, u_0 désigne le nombre de clients le premier mois et le nombre de clients du mois de rang n est estimé par l'arrondi à l'unité de u_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 80$.

1° Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2° a) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 70 \times 0{,}95^n + 80$.

3° On considère l'algorithme suivant.

$s \leftarrow 0$
Pour n allant de 0 à 23
  $u \leftarrow 70 \times 0{,}95^n + 80$
  $s \leftarrow s + u$
Fin Pour

Remarque : dans cet algorithme $s \leftarrow 0$ signifie que la valeur 0 est affectée à la variable s.

En sortie de cet algorithme, la valeur arrondie à l'unité de la variable s est 2 911. Que représente ce nombre dans le contexte ?

4° Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $70 \times 0{,}95^n + 80 \leq 100$. Interpréter la réponse dans le contexte.

EXERCICE 2 (10 points)

Une entreprise fabrique en grande série des verres optiques.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi exponentielle

Dans un laboratoire, on utilise une meuleuse automatique pour le détourage des verres. Cette meuleuse doit être soumise à un étalonnage aussi souvent que nécessaire. On considère que la durée de bon fonctionnement, exprimée en jours, entre deux étalonnages, est modélisée par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,125$.
On rappelle que :

– pour tout nombre réel positif t, on a $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$;

– l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T est égale à $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

1° Déterminer $P(T \leq 6)$.

2° Déterminer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de cette machine dépasse 9 jours.

3° Calculer $E(T)$ puis interpréter ce nombre dans le contexte.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Les verres sont ensuite ébauchés.
On admet qu'après cet usinage, 1 % des verres ont un défaut de courbure.
On prélève au hasard 500 verres ébauchés. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 verres.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de ce type, associe le nombre de verres qui ont un défaut de courbure.

1° a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $P(X = 5)$.

c) Calculer la probabilité que le nombre de verres ayant un défaut de courbure soit strictement inférieur à 4 dans un tel prélèvement.

2° On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre μ de cette loi de Poisson.

b) On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre μ où μ est la valeur obtenue au a).
Calculer $P(Y \leq 3)$.

C. Test d'hypothèse

Les verres sans défaut de courbure sont alors polis. On constate qu'à l'issue du polissage certains verres sont défectueux.
On considère la production de verres polis d'une journée. On souhaite construire un test d'hypothèse unilatéral pour décider si, au seuil de 5 %, on peut considérer qu'il y a plus de 10 % de verres défectueux.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 400 verres prélevé dans la production, associe la fréquence des verres défectueux dans cet échantillon.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}$.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $p = 0{,}10$ ».
L'hypothèse alternative H_1 est : « $p > 0{,}10$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1° Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,10 et d'écart type 0,015.

2° On souhaite déterminer, sous l'hypothèse nulle H_0, le réel positif a tel que $P(F \leq a) = 0{,}95$.

Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La valeur approchée de a arrondie au millième est :

0,075	0,100	0,119	0,125

3° Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4° On prélève un échantillon aléatoire de 400 verres dans la production de verres polis de la journée. On constate qu'il y a 46 verres défectueux dans cet échantillon.
Quelle est la conclusion du test ?

D. Événements indépendants

En fin de processus, les verres sont contrôlés.
On a contrôlé la qualité de la production d'une journée et on a constaté que 5 % des verres ont un défaut de diamètre et que 8 % des verres ont un défaut d'épaisseur.
On prélève un verre au hasard dans cette production.
On note D l'événement : « le verre prélevé présente un défaut de diamètre ».
On note E l'événement : « le verre prélevé présente un défaut d'épaisseur ».
On admet que $P(D) = 0{,}05$ et $P(E) = 0{,}08$ et que les événements D et E sont indépendants.

1° Calculer $P(D \cap E)$.

2° Calculer la probabilité que le verre contrôlé ait au moins un des deux défauts.

3° Calculer la probabilité que le verre contrôlé n'ait aucun des deux défauts.